SESSION 2000

Filière PC

EPREUVE DE MATHEMATIQUES I - ANALYSE

Durée : 3 heures

L'usage des calculatrices est autorisé.

La présentation et la rigueur de la rédaction seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. ***En particulier il est demandé d'énoncer avec précision les hypothèses des théorèmes utilisés.***

L'énoncé comporte quatre pages. Chaque question peut être traitée en admettant les résultats des questions précédentes.

Notations

On désignera par R l'ensemble des nombres réels et par N^* l'ensemble des entiers naturels non nuls.

Pour tout entier k > 0 on notera u_k la fonction définie sur R_+ par : $u_k(x) = (2k^2x^2 - 1)e^{-k^2x^2}$.

Pour $x > 0$ la somme de la série $\sum_{k\geq 1} u_k(x)$ sera désignée par $S(x)$ et la somme partielle de rang n, $\sum_{k=1}^{n} u_k(x)$ sera notée $S_n(x)$. On admettra que : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

Partie I

Dans cette partie, on établit que S est intégrable sur R_+^*

*1.*a) Justifier la convergence uniforme de la série $\sum_{k\geq 1} u_k$ sur tout intervalle $[a,b] \subset R_+^*$.

Tournez la page S.V.P.

b) Montrer que la fonction S est continue sur R_+^*.

2.a) Prouver que pour tout entier non nul k, u_k est intégrable sur R_+.

b) Calculer $\int_0^{+\infty} u_k(t)dt$ et en déduire que la somme de la série $\sum_{k\geq 1} \int_0^{+\infty} u_k(t)dt$ est nulle. (*Indication* : On pourra intégrer par parties $\int_\varepsilon^A 2k^2t^2e^{-k^2t^2}dt$.)

c) Etudier la nature de la série $\sum_{k\geq 1} \int_0^{+\infty} |u_k(t)|\ dt$.

(*Indication* : On pourra remarquer que $\int_0^{+\infty} |u_k(t)|\ dt \geq \int_{\frac{1}{k}}^{+\infty} u_k(t)dt$.)

3. Soit $a \geq 1$ et f une fonction continue et positive sur R_+, croissante sur $[0,a]$ et décroissante sur $[a,+\infty[$.

On pose pour tout entier naturel k : $d_k(f) = f(k) - \int_k^{k+1} f(t)dt$.

a) Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} d_k(f)$ est convergente. On notera *D(f)* sa somme.

b) Déterminer un entier naturel p, indépendant de f et de a, tel que : $|\ D(f)\ | \leq p\, f(a)$.

(*Indication* : On pourra encadrer $d_k(f)$ en distinguant les différents cas : k≥a , k <a-1 et a > k ≥a-1)

On admettra dans la suite du problème que cette majoration est encore valable pour $a \geq 0$.

4. On fixe $x > 0$. On considère les fonctions $f_1 : t \mapsto e^{-x^2t^2}$ et $f_2 : t \mapsto 2x^2t^2e^{-x^2t^2}$.

a) Prouver que : $\int_0^{+\infty} f_1(t)dt = \int_0^{+\infty} f_2(t)dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$

b) En utilisant la question I 3 b) appliquée aux fonctions f_1 et f_2 , démontrer les propositions suivantes :

i) S est bornée sur R_+^*.

ii) $\exists M_1 > 0,\ \forall x \in R_+^*,\ \forall n \in N^*\ \left|\sum_{k=1}^{n} u_k(x)\right| \leq M_1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2x}$

5.a) Etablir l'inégalité suivante: $\forall w \in R_+ \quad w \le 4e^{\frac{w}{4}}$.

b) En déduire que : $\forall x \ge 1$, $\forall k \in N^*$, $0 \le u_k(x) \le 4\, e^{-\frac{k^2x^2}{2}} \le 4\, e^{-\frac{kx^2}{2}}$.

c) Puis démontrer que : $\forall x \ge 1 \quad (e^{\frac{x^2}{2}} - 1)\, S(x) \le 4$

6. Déduire de ce qui précède que la fonction S est intégrable sur R_+^*.

Partie II

L'objet de cette partie est le calcul de l'intégrale de S sur R_+^*

1. Prouver qu'on peut définir deux fonctions Φ et Λ sur $]-1,+\infty[$ en posant :

$$\Phi(x) = \int_0^{+\infty} S(t)\, t^x\, dt$$

$$\Lambda(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ t^x\, dt$$

2. a) Montrer que les fonctions Φ et Λ sont continues sur $]-1,+\infty[$.

b) Calculer $\Lambda(-\frac{1}{2})$.

*3.*Démontrer que pour tout $x > 0$ on a :

$$\int_0^{+\infty} u_k(t)\ t^x\, dt = \frac{x}{2\, k^{1+x}}\, \Lambda(\frac{x-1}{2})$$

*4.*On pose alors, si cette série converge, $Z(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2\, k^{x+1}}$.

a) Donner l'ensemble de définition de Z.

b) Calculer : $\lim_{x \to 0^+} x Z(x)$

(*Indication*: On pourra appliquer la question I 3 à la fonction $t \mapsto \frac{1}{2(1+t)^{x+1}}$.)

5. On considère deux réels fixés $\varepsilon > 0$ et $x > 0$.

Tournez la page S.V.P.

a) Montrer qu'il existe un réel $\lambda \in]\,0,\,1\,[$ tel que : $\forall\, n \in N \quad \left| \int_0^{\lambda} [S(t) - S_n(t)]t^x \, dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(*Indication*: On pourra utiliser la question I 4)

Dans la suite de la question 5 *on supposera* λ *choisi de cette façon.*

b) Montrer qu'il existe un entier naturel N_1 tel que : $\forall\, n \geq N_1 \quad \left| \int_{\lambda}^{1} [S(t) - S_n(t)]t^x dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(*Indication*: On pourra utiliser la question I 1)

c) Montrer qu'il existe un entier naturel N_2 tel que : $\forall\, n \geq N_2 \quad \left| \int_1^{+\infty} [S(t) - S_n(t)]t^x dt \right| < \frac{\varepsilon}{3}$

(*Indication*: On pourra utiliser la question I 5 b)

d)En déduire qu'il existe un entier naturel N tel que pour tout n ≥ N :

$$\left| \Phi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2\,k^{1+x}} \Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

6. Démontrer que pour tout $x > 0$:

$$\Phi(x) = x\,Z(x)\;\Lambda\left(\frac{x-1}{2}\right)$$

7. En utilisant les questions II 2) et II 4) calculer : $\int_0^{+\infty} S(t)\,dt$.

8. Comparer le résultat de la question II 7) à celui obtenu dans la question I 2 b). Citer le théorème d'intégration terme à terme d'une série de fonctions et expliquer pourquoi il ne s'applique pas ici.

IMPRIMERIE NATIONALE. — D'après documents fournis.